Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I
Profesor: Francisco Periago Esparza. Email: f.periago@upct.es

Hoja de Problemas: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

1. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a)	$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{y}$	(b)	$\frac{dy}{dx}=4xy^2$	(c)	$\frac{dy}{dx}=3x^2y$
(d)	$y^2\frac{dy}{dx}=e^x$	(e)	$\frac{dy}{dx}=y\,(y-1)$	(f)	$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$
(g)	$\frac{dy}{dx}+2y=4$	(h)	$\frac{dy}{dx}+3y=e^{-3x}$	(i)	$\frac{dy}{dx}+(2\tan x)\,y=\sin x$
(j)	$\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=2\cos x$	(k)	$\frac{dy}{dx}+ax^2y=bx^2$	(l)	$\frac{dy}{dx}+a\frac{y}{x}=x^2$

2. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

$$(a)\ \begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{y+2}{x-3}\\ y(0)=1\end{cases}\quad (b)\ \begin{cases}\frac{dy}{dx}=e^{x+y}\\ y(0)=0\end{cases}\quad (c)\ \begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-1}{2y+1}\\ y(0)=-1\end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}\\ y(1)=2\end{cases}\quad (e)\ \begin{cases}2xy\frac{dy}{dx}=-\left(x^2+y^2\right)\\ y(1)=0\end{cases}\quad (f)\ \begin{cases}xy^3\frac{dy}{dx}=x^4+y^4\\ y(2)=0\end{cases}$$

3. El proceso químico formado por dos pasos consecutivos de primer orden

$$A\xrightarrow{k_1}B\xrightarrow{k_2}C$$

se modela matemáticamente por medio de las dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases}\frac{d[A]}{dt}=-k_1[A]\\ \frac{d[B]}{dt}=k_1[A]-k_2[B]\end{cases}$$

Supongamos que las concentraciones iniciales son $[A]_0=a$, $[B]_0=[C]_0=0$, y que las concentraciones en el tiempo t son $[A]=a-x(t)$, $[B]=y(t)$ y $[C]=x(t)-y(t)$. Calcula las concentraciones en el tiempo t para los casos: (i) $k_1=1$, $k_2=10$, (ii) $k_1=k_2=1$, y (iii) $k_1=1$, $k_2=0{,}1$. Representa gráficamente las soluciones obtenidas en los tres casos para $0\le t\le 10$.

4. El proceso químico formado por tres pasos consecutivos de primer orden

$$A\xrightarrow{k_1}B\xrightarrow{k_2}C\xrightarrow{k_3}D$$

está modelado matemáticamente por medio del sistema

$$\begin{cases}\frac{d(a-x)}{dt}=-k_1(a-x)\\ \frac{d(y)}{dt}=k_1(a-x)-k_2y\\ \frac{d(z)}{dt}=k_2y-k_3z\\ x(0)=y(0)=z(0)=0\end{cases}$$

donde $(a-x)$, y, z son las concentraciones de A, B, y C, respectivamente, en el tiempo t. Supongamos que $k_1\neq k_2$, $k_1\neq k_3$ y $k_2\neq k_3$. Calcula C como función de t.

5. Consideremos un circuito eléctrico tipo RL formado por una resistencia y una bobina. Las leyes de Ohm y Kirchhoff establecen que la intensidad I de corriente eléctrica que cirula por el circuito en el tiempo t obedece la ecuación

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E$$

donde las constantes L y R representan la inductancia y la resistencia, y E es la fuerza electromotriz generada por el generador o la batería. En el caso de corriente continua $E = E_0$, constante. Resuelve el siguiente problema e interpreta físicamente la solución obtenida:

$$\begin{cases} L\frac{dI}{dt} + RI = E_0, & t > 0 \\ I(0) = 0. \end{cases}$$

6. Para un circuito tipo RC formado por una resistencia y un condensador, la intensidad de corriente I satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE}{dt}$$

donde la constante C representa la capacitancia del condensador. Resuelve la ecuación anterior para la condición inicial $I(0) = 0$ en los casos: (i) $E = E_0$, constante, y (ii) $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

Referencias

[1] E. Steiner, The Chemistry Maths book, Oxford University Press, 1996.

HOJA DE PROBLEMAS. EDO orden 1

1) e) $\dfrac{dy}{dx} = y(y-1)$

ecuación de variables separables

$$\frac{y'}{y(y-1)} = 1$$

Integrando

$$\underbrace{\int \frac{y'(x)\,dx}{y(x)(y(x)-1)}}_{\substack{y(x)=t \to y'(x)dx=dt \\ \parallel \\ \int \frac{1}{t(t-1)}dt}} = \int 1\,dx = x + C_1$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)} = \frac{(A+B)t - A}{t(t-1)};$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -A=1 \end{array}\right\} \to A=-1 \to B=1$$

Por tanto,

$$\int \frac{1}{t(t-1)}dt = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} = -\log t + \log(t-1)$$

$$= \log \frac{t-1}{t};$$

$$\log \frac{y(x)-1}{y(x)} = x + C_1 \to \boxed{\frac{y(x)-1}{y(x)} = e^{x+C_1} = e^{C_1}e^x = C'e^x}$$

(i) $\dfrac{dy}{dx} + (2\tan x)\, y = \operatorname{sen} x$

ecuación lineal no homogénea

1º) Ecuación homogénea

$$y_h' = -(2\tan x)\, y_h \; ;$$

$$\frac{y_h'}{y_h} = -2\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\underbrace{\int \frac{y_h'(x)}{y_h(x)}\, dx} = 2\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

$$\log y_h(x) = 2\log\cos x + c_1 = \log \cos^2 x + c_1 \; ;$$

$$y_h(x) = e^{c_1}\cos^2 x = c\,\cos^2 x$$

2º) Ecuación completa : método de variación de constantes

$$y(x) = c(x)\cos^2 x \; ;$$

$$y' = c'\cos^2 x + c\cdot 2\cos x\cdot(-\operatorname{sen} x)$$

$$= -2\tan x\cdot y + \operatorname{sen} x \; ;$$

$$c'(x)\cos^2 x + \cancel{c\cdot 2\,\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\cos^2 x} = \cancel{-2\tan x\cdot y} + \operatorname{sen} x$$

$$c'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \; ;$$

$$c(x) = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x\, dx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t}$$

$$= \frac{1}{\cos x} + c \; ;$$

Por tanto,

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{1}{\cos x} + c'\right)\cos^2 x = c\cos^2 x + \cos x}$$

2 d) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$

ecuación homogénea: si $F(x,y) = \dfrac{x+y}{x}$, entonces

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x} = \frac{\lambda(x+y)}{\lambda x} = \frac{x+y}{x} = F(x,y).$$

Cambio de variable: $\boxed{y = x \cdot v}$

Derivando:

$$\frac{dy}{dx} = v + x \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{x + x \cdot v}{x} = 1 + v;$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = 1 + \cancel{v};$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x};$$

Integrando:

$$\underbrace{\int v'(x)\,dx}_{= v(x)} = \int \frac{1}{x}\,dx = \log x \pm c_1;$$

$$v(x) = \log x + c_1;$$

$$\frac{y(x)}{x} = \log x + c_1; \quad \boxed{y(x) = x\log x + c_1 x}$$

Imponemos la condición inicial:

$$y(1) = 2 \iff 2 = 1 \cdot \underbrace{\cancel{\log 1}}_{0} + c_1 \cdot 1 \to c_1 = 2;$$

solución $\boxed{y(x) = x\log x + 2x}$

f) $\begin{cases} xy^3 \dfrac{dy}{dx} = x^4+y^4 \\ y(2)=0 \end{cases}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^4+y^4}{xy^3}$ ecuación homogénea

$F(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{xy^3}$; $F(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda^4 x^4 + \lambda^4 y^4}{\lambda x \cdot (\lambda^3 y^3)} = \dfrac{x^4+y^4}{xy^3}$;

Cambio de variable : $y = x \cdot v$

$\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{x^4 + x^4 v^4}{x\, x^3 \cdot v^3} = \dfrac{1+v^4}{v^3}$;

$x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1+v^4}{v^3} - v = \dfrac{1+v^4-v^4}{v^3} = \dfrac{1}{v^3}$;

$v^3 v' = \dfrac{1}{x}$; Integrando: $\int v^3(x) v'(x) dx = \int \frac{1}{x} dx$;

$\dfrac{v^4(x)}{4} = \log x + C_1$;

$v^4(x) = 4 \log x + 4C_1$;

$\dfrac{y^4(x)}{x^4} = 4 \log x + 4C_1$;

$y^4(x) = 4x^4 \log x + 4x^4 C_1$;

Imponemos la condición inicial $y(2)=0$;

$0 = \cancel{4 \cdot 2^4} \log 2 + \cancel{4 \cdot 2^4} \cdot C_1 \Rightarrow C_1 = -\log 2$;

Solución:

$$\boxed{y^4(x) = 4x^4 \log x - 4x^4 \log 2}$$

③ $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A]$$

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B]$$

Concentraciones iniciales $[A]_0 = a$, $[B]_0 = [C]_0 = 0$

$[A] = a - x(t) \longrightarrow \frac{d[A]}{dt} = -x'(t)$

$[B] = y(t) \longrightarrow \frac{d[B]}{dt} = y'(t)$

$[C] = x(t) - y(t)$

Tenemos el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x'(t) = k_1(a - x(t)) \\ y'(t) = k_1(a - x(t)) - k_2 y(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x'}{a - x} = k_1 \longrightarrow \underbrace{\int \frac{x'(t)}{a - x(t)} dt}_{-\log(a - x(t))} = \int k_1 dt = k_1 t + c_1$$

;

$\log(a - x(t)) = -k_1 t - c_1$;

$a - x(t) = e^{-k_1 t - c_1} = c_2 e^{-k_1 t}$;

$x(t) = a - c_2 e^{-k_1 t}$

$0 = x(0) = a - c_2 \rightarrow c_2 = a.$

$\boxed{x(t) = a(1 - e^{-k_1 t})}$ $\boxed{[A] = [A]_0 e^{-k_1 t}}$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$y' = k_1 a e^{-k_1 t} - k_2 y;$$

$$y' = -k_2 y + k_1 a e^{-k_1 t}$$ ecuación lineal no homogénea

1º) Ecuación homogénea

$$y_h' = -k_2 y_h;$$

$$\frac{y_h'}{y_h} = -k_2; \quad \log y_h(t) = -k_2 t + c_1;$$

$$y_h(t) = c_2 e^{-k_2 t};$$

2º) Ecuación completa

$$y(t) = c_2(t) e^{-k_2 t};$$

$$y' = c_2' e^{-k_2 t} - \cancel{c_2 k_2 e^{-k_2 t}} = \cancel{-k_2 y} + k_1 a e^{-k_1 t};$$

$$c_2' = k_1 a e^{(k_2-k_1)t};$$

$$c_2(t) = k_1 a \int e^{(k_2-k_1)t} dt \overset{\text{si } k_1 \neq k_2}{=} k_1 a \frac{1}{k_2-k_1} e^{(k_2-k_1)t} + c$$

$$= a \frac{k_1}{k_2-k_1} e^{(k_2-k_1)t} + c;$$

Solución general:

$$y(t) = \left(\frac{a k_1}{k_2-k_1} e^{(k_2-k_1)t} + c \right) e^{-k_2 t}$$

$$= \frac{a k_1}{k_2-k_1} e^{-k_1 t} + c e^{-k_2 t}$$

$$0 = y(0) = \frac{a k_1}{k_2-k_1} + c; \quad c = -\frac{a k_1}{k_2-k_1}.$$

Solución: $y(t) = \dfrac{a k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$ si $k_1 \neq k_2$.

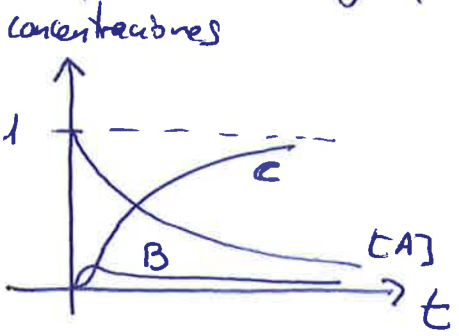
Si $k_1 = k_2$ entonces $c_2(t) = k_1 a \int dt = k_1 a t + c$;

Solución: $y(t) = (k_1 a t + c)\, e^{-k_2 t}$

$0 = y(0) = c$;

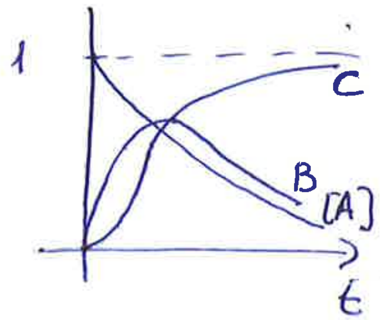
solución
$$\boxed{\begin{array}{l} y(t) = k_1 a t\, e^{-k_2 t} \\ [B] = k_1 [A]_0\, t\, e^{-k_2 t} \end{array}}$$

Representación gráfica de las soluciones



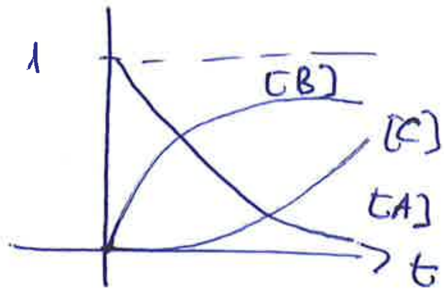
$k_1 = 1,\ k_2 = 10$

$[A_0]_0 = 1$



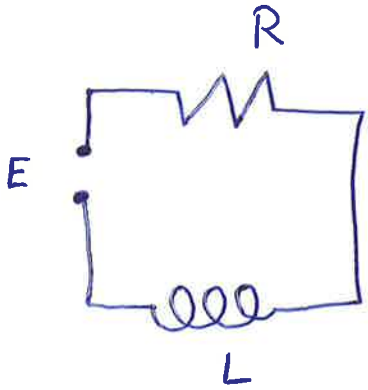
$k_1 = k_2 = 1$

$[A]_0 = 1$

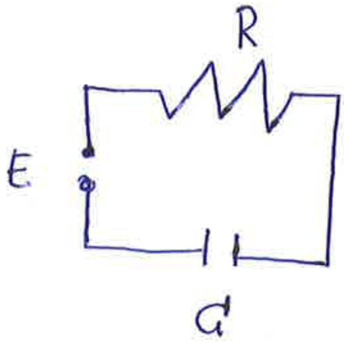


$k_1 = 1,\ k_2 = 0{,}1$

$[A]_0 = 1$



Circuito RL



Circuito RC

(6) $$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C} I = \dfrac{dE}{dt}; \\ I(0) = 0 \end{cases}$$

$I \equiv$ intensidad de corriente

(i) Corriente continua $E = E_0 \equiv cte \rightarrow \dfrac{dE}{dt} = 0;$

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0;$$

$$L\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{C} I;$$

$$\frac{I'}{I} = -\frac{1}{LC};$$

$$\log I(t) = -\frac{1}{LC} t + c_1;$$

$$I(t) = c\, e^{-\frac{1}{LC}t};$$

$$0 = I(0) = c$$

$$\boxed{\text{Solución} \quad I(t) = 0}$$

(ii) Corriente alterna $E(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$

$$\frac{dE}{dt} = E_0 \omega \cos(\omega t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C} I = E_0 \omega \cos(\omega t) \quad \text{ecuación no homogénea.} \\ I(0) = 0 \end{array} \right.$$

1º) Ecuación homogénea

$$L \frac{dI_h}{dt} + \frac{1}{C} I_h = 0;$$

solución: $I_h(t) = C e^{-\frac{1}{LC}t}$

2º) Ecuación completa: $I(t) = C(t) e^{-\frac{1}{LC}t}$

$$I' = C' e^{-\frac{1}{LC}t} - C \frac{1}{LC} e^{-\frac{1}{LC}t} = -\frac{1}{C} I + E_0 \omega \cos(\omega t);$$

$$C'(t) = E_0 \omega e^{\frac{1}{LC}t} \cos(\omega t)$$

$$C(t) = E_0 \omega \int e^{\frac{1}{LC}t} \cos(\omega t)\, dt$$

Sea $I_1 = \int e^{\frac{1}{LC}t} \cos(\omega t)\, dt = \left| \begin{array}{l} \cos(\omega t) = u \to -\omega \operatorname{sen}(\omega t) dt = du \\ e^{\frac{1}{LC}t} dt = dv \to v = LC e^{\frac{1}{LC}t} \end{array} \right.$

$$= LC e^{\frac{1}{LC}t} \cos(\omega t) + \omega LC \int \underbrace{e^{\frac{1}{LC}t}}_{dv} \underbrace{\operatorname{sen}(\omega t)}_{u} dt$$

$$= LC e^{\frac{1}{LC}t} \cos(\omega t) + \omega LC \left\{ LC e^{\frac{1}{LC}t} \operatorname{sen}(\omega t) - LC\omega \int e^{\frac{1}{LC}t} \cos(\omega t) dt \right\}$$

$$(1 + \omega^2 L^2 C^2) I_1 = LC e^{\frac{1}{LC}t} \left(\cos(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\omega t) \right)$$

$$I_1 = \frac{LC}{1 + \omega^2 L^2 C^2} e^{\frac{1}{LC}t} \left(\cos(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\omega t) \right) + C_1$$

$$I(t) = \left(\frac{LC}{1+\omega^2L^2C^2}\, e^{\frac{1}{LC}t} \left(\cos(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\omega t)\right) + d \right) e^{-\frac{1}{LC}t}$$

$$= C\, e^{-\frac{1}{LC}t} + \frac{LC}{1+\omega^2L^2C^2} \left(\cos(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\omega t)\right)$$

$$0 = I(0) = C + \frac{LC}{1+\omega^2L^2C^2}; \quad C = -\frac{LC}{1+\omega^2L^2C^2};$$

Solución:

$$I(t) = \underbrace{-\frac{LC}{1+\omega^2L^2C^2}\, e^{-\frac{1}{LC}t}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\frac{LC}{1+\omega^2L^2C^2} \left(\cos(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\omega t)\right)}_{\text{estacionario.}}$$